

# AC 2-dimensional como Modelo de una Membrana Vibrante

I. Huerta-Trujillo<sup>1</sup>, E. Castillo-Montiel<sup>1</sup>, J.C. Chimal-Eguía<sup>1</sup>, N. Sanchez-Salas<sup>2</sup> and J.A. Martinez-Nuño<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Laboratorio de Simulación y Modelado

Centro de Investigación en Computación, Instituto Politécnico Nacional,  
Av. Juan de Dios Bátiz, Esq. Miguel Othón de Mendizábal, Col. Nueva Industrial Vallejo, Del.  
Gustavo A. Madero, D. F., C. P. 07738, México..

<sup>2</sup> Sección de Estudios de Posgrado

Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional,  
Av. Instituto Politécnico Nacional Edificio 9, Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Col.  
Zacatenco. Del. Gustavo A. Madero. D. F., C. P. 07738, México.

<sup>3</sup> Sección de Estudios de Posgrado

Escuela Superior de Cómputo, Instituto Politécnico Nacional,  
Av. Juan de Dios Bátiz, Esq. Miguel Othón de Mendizábal, Col. Lindavista. Del. Gustavo A.  
Madero. D. F., C. P. 07738, México.

**Abstract.** En este trabajo se propone un modelo de Autómata Celular (AC) 2-dimensional y el proceso de obtención de la regla de evolución, el modelo obtenido se compara contra la solución analítica de una ecuación diferencial parcial hiperbólica de dos dimensiones, lineal y homogénea, la cual modela una membrana vibrante con condiciones iniciales y de frontera específicas, se analiza el espectro de frecuencia así como el error entre los datos arrojados por el modelo de AC contra los datos proporcionados por la evaluación de la solución a la ecuación diferencial.

**Keywords:** Autómatas celulares, ecuaciones diferenciales parciales, cómputo paralelo, membrana vibrante.

## 1 Introducción

Un autómata celular (AC), es un sistema dinámico discreto, que consiste en un arreglo de células (nodos) en alguna dimensión  $d$  [3]. Wolfram [9] los define como idealizaciones matemáticas de sistemas físicos, cuyo espacio y tiempo son discretos, en donde las cantidades físicas se pueden circunscribir a un conjunto finito de valores.

La definición de los AC lleva implícitamente asociado otros conceptos, como espacio y localidad de influencia. Se asume que el sistema representado está distribuido en el espacio y que regiones cercanas tienen mayor influencia entre sí, que otras que se encuentren apartadas dentro del sistema [1].

### 1.1 Definición Formal de Autómata Celular

**Definición 1** Una “lattice” o “retícula” es un arreglo uniforme, generalmente infinito [9], formado por objetos idénticos llamados “células” [7]. Este arreglo puede ser  $n$ -dimensional, pero para efectos de simulación de sistemas naturales se implementa de 1, 2 ó 3 dimensiones, de tamaño finito.

**Definición 2** Un AC es una 4-tupla  $AC = (L, S, V, \Phi)$  donde:

$L$ : Es una retícula regular y  $L = \{c \in \mathbb{C}^d\}$  para una lattice  $d$ -dimensional.

$S$ : Es el conjunto finito de todos los posibles estados de las células,  $c \in L$ .

$V$ : Es el conjunto finito de células que definen la vecindad para una célula.

$\Phi$ :  $S^d \rightarrow S$ , es una función de transición aplicada simultaneamente a las células que conforman el lattice.

La actualización en el estado de las células requiere que se conozca el estado de las células vecinas [2].

**Definición 3** Una vecindad para una célula  $c \in L$  es  $V(c) = \{k_1, k_2, \dots, k_n \mid k_j \in L, j = 0, 1, \dots, n\}$ ; es decir, una vecindad es un conjunto de células para las cuales la célula  $c$  es el punto de referencia para el área de influencia.

## 2 Modelo clásico de Membrana Vibrante

La obtención de la ecuación de movimiento para una membrana [6] se basa en las suposiciones de que es delgada y uniforme con rigidez despreciable, que es perfectamente elástica, sin amortiguamiento y que vibra con desplazamientos de amplitud pequeños. La ecuación que regula las vibraciones transversales de una membrana esta dada por [4]:

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

donde  $u(x, y, t)$  es la deflexión de la membrana, y  $c^2 = \frac{T}{\rho}$ , siendo  $\rho$  la densidad de masa de la membrana [8] y  $T$  la tensión de la membrana por unidad de longitud. La ecuación (1) se denomina *ecuación de onda en dos dimensiones*.

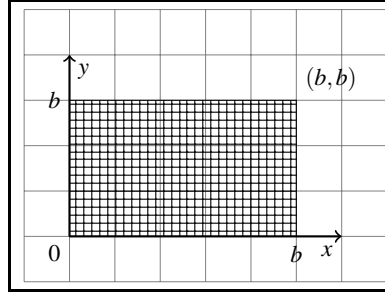
Se considera una membrana cuadrada (Fig:1), definimos las condiciones de frontera como sigue:

$$u(x, y, t) = 0 \text{ para } x = 0, x = b, y = 0, y = b \quad \forall t \quad (2)$$

Las condiciones iniciales se definen como:

$$u(x, y, t) = f(x, y) \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x, y) \quad (4)$$



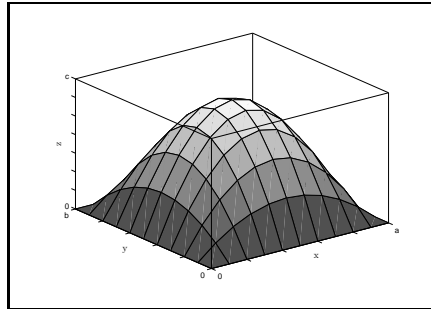
**Fig. 1.** Membrana rectangular de longitud  $b \times b$ .

donde  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  son el desplazamiento y la velocidad inicial de la membrana respectivamente.

Si definimos las condiciones iniciales como:

$$u(x, y, t) = xy(x - b)(y - b) \quad (5)$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (6)$$



**Fig. 2.** Condiciones iniciales y de frontera del sistema de membrana.

Entonces la membrana inicia del reposo con una distribución espacial que puede verse en la gráfica de la figura 2.

La solución a la ecuación diferencial (1) con las condiciones iniciales y de frontera descritas anteriormente es:

$$u_{m,n}(x, y, t) = [G_{m,n} \cos(ck_{m,n}t) + H_{m,n} \sin(ck_{m,n}t)] \sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (7)$$

Donde  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  y  $k_{m,n} = \frac{\pi\sqrt{m^2+n^2}}{b}$ .

La solución plasmada en la ec. (7) depende directamente de los valores que  $m$  y  $n$  tomen, luego entonces cada combinación de estas es una solución particular a (1). Por el principio de superposición la combinación lineal de las soluciones es también una solución a la ecuación diferencial luego entonces se tiene:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}(x, y, t) \quad (8)$$

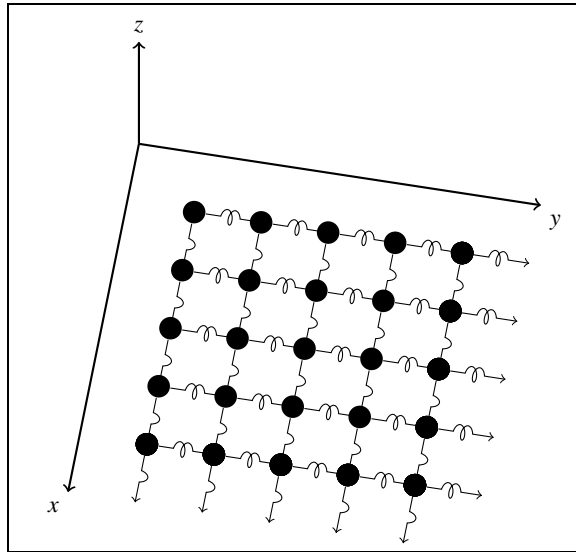
Usando series de Fourier, la solución final es:

$$u(x, y, t) = \frac{64b^4}{\pi^6} \sum_{m=1, \text{ impar}}^{\infty} \sum_{n=1, \text{ impar}}^{\infty} \frac{1}{m^3 n^3} \cos\left(\frac{\pi\sqrt{m^2 + n^2}}{b} ct\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (9)$$

### 3 Discretización del modelo analítico

#### 3.1 Análisis previo

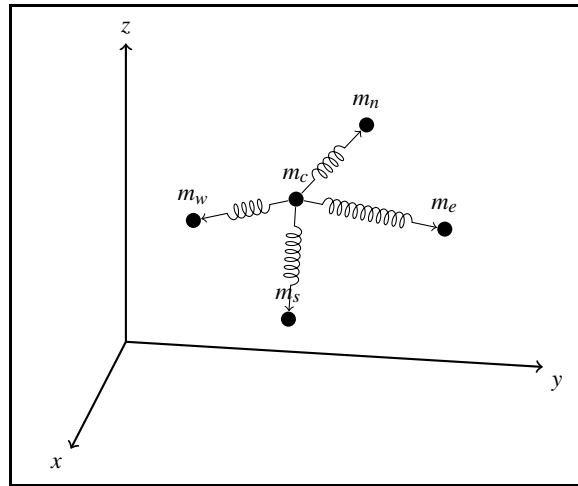
Supongamos que una membrana es una sucesión de puntos con masa específica unidos por resortes, cada punto de la membrana se encuentra unido a sus cuatro vecinos ortogonales, donde la masa de la membrana se encuentra distribuida en los puntos de unión y no en los resortes, y el borde de la membrana se encuentra sujeto a una superficie.



**Fig. 3.** Representación de una membrana como una sucesión de masas y resortes, cada masa esta unida a sus vecinos norte, sur, este y oeste.

Llamaremos  $d_e$  o distancia de equilibrio, a la longitud del resorte que une a dos masas y el cual se encuentra en estado de reposo, esa longitud será la que separe a las masas.

Para un sistema de membrana vibrante con condiciones iniciales de posición descrita en la ecuación (5) y partiendo del reposo tenemos que cada punto de unión de la membrana se encuentra sometido a cuatro fuerzas que actúan en dirección de cada uno de los vecinos ortogonales que llamaremos  $m_c, m_n, m_s, m_e, m_w$  para la partícula central, norte, sur, este y oeste (west) respectivamente. como se muestra en la figura



**Fig. 4.** Representación de la vecindad von Neumann del AC, la célula central y sus cuatro vecinos ortogonales, así como la dirección en la que ejercen la fuerza los vecinos.

Es necesario conocer la fuerza que cada vecino ejerce sobre  $m_c$ . Siguiendo el procedimiento definido por [5], procedemos a calcular para un vecino.

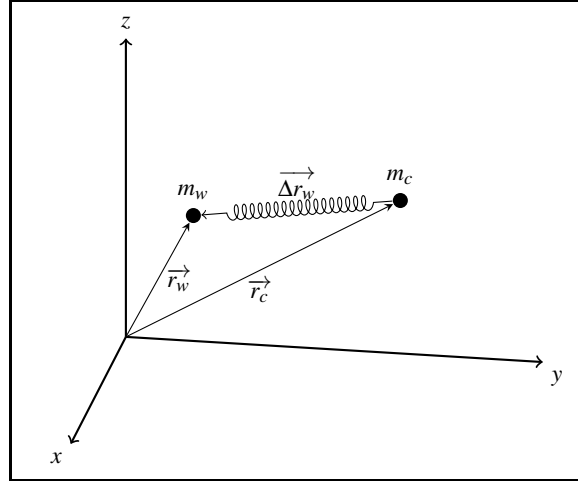
Tomando en cuenta la figura tenemos que:

$$\begin{aligned} \vec{r}_c + \vec{\Delta r}_w &= \vec{r}_w \\ \Rightarrow \vec{\Delta r}_w &= \vec{r}_w - \vec{r}_c \end{aligned} \quad (10)$$

El vector  $\vec{\Delta r}_w$  se puede expresar como el producto de un vector unitario por el módulo del mismo, entonces:

$$\vec{\Delta r}_w = |\vec{\Delta r}_w| \widehat{\Delta r}_w$$

Sabemos que  $|\vec{\Delta r}_w|$ , representa la distancia de separación de las masas, es posible escribir este escalar como la suma de la distancia de equilibrio o longitud del resorte incrementando la deformación sufrida por el mismo resorte debido al cambio de posición de la masa central, por lo que tenemos:



**Fig. 5.** Representación de los vectores asociados con la célula central, un vecino y la dirección de la fuerza ejercida por el resorte en dirección a la célula vecina.

$$|\vec{\Delta r_w}| \widehat{\Delta r_w} = (d_e + \Delta d_e) \widehat{\Delta r_w}$$

Donde  $\Delta d_e$  es el valor de la deformación del resorte, la cual es necesario calcular con el objeto de conocer el incremento de la fuerza desde el punto de equilibrio al punto de análisis, por lo que tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |\vec{\Delta r_w}| \widehat{\Delta r_w} &= (d_e + \Delta d_e) \widehat{\Delta r_w} \\ \Rightarrow |\vec{\Delta r_w}| \widehat{\Delta r_w} &= d_e \widehat{\Delta r_w} + \Delta d_e \widehat{\Delta r_w} \\ \Rightarrow \Delta d_e \widehat{\Delta r_w} &= |\vec{\Delta r_w}| \widehat{\Delta r_w} - d_e \widehat{\Delta r_w} \\ \Rightarrow \Delta d_e \widehat{\Delta r_w} &= (|\vec{\Delta r_w}| - d_e) \widehat{\Delta r_w} \end{aligned} \quad (11)$$

Dado que ambos elementos de la ecuación (11) son vectores, los representamos en sus componentes como sigue:

$$\Delta d_e \widehat{\Delta r_w} = (\Delta x_w, \Delta y_w, \Delta z_w) \quad (12)$$

$$(|\vec{\Delta r_w}| - d_e) \widehat{\Delta r_w} = (|\vec{\Delta r_w}| - d_e) \left( \frac{x_w - x_c}{|\vec{\Delta r_w}|}, \frac{y_w - y_c}{|\vec{\Delta r_w}|}, \frac{z_w - z_c}{|\vec{\Delta r_w}|} \right) \quad (13)$$

Igualando miembro a miembro de las ecuaciones vectoriales (12) y (13), tenemos:

$$\Delta x_w = (|\vec{\Delta r_w}| - d_e) \frac{x_w - x_c}{|\vec{\Delta r_w}|} \quad (14)$$

$$\Delta y_w = \left( |\vec{\Delta r_w}| - d_e \right) \frac{y_w - y_c}{|\vec{\Delta r_w}|} \quad (15)$$

$$\Delta z_w = \left( |\vec{\Delta r_w}| - d_e \right) \frac{z_w - z_c}{|\vec{\Delta r_w}|} \quad (16)$$

De esta forma obtenemos las componentes rectangulares  $\Delta x_w$ ,  $\Delta y_w$ , y  $\Delta z_w$  que corresponden a los incrementos de desplazamiento en los ejes coordenados  $x$ ,  $y$  y  $z$  para la masa  $m_c$  para  $\vec{\Delta r_w}$ , los valores de los componentes para los vectores  $\vec{\Delta r_n}$ ,  $\vec{\Delta r_s}$  y  $\vec{\Delta r_e}$  se calculan de forma análoga.

Continuando con el análisis, por la *ley de Hooke* para un sistema de masa-resorte en una dimensión tenemos que:

para un sistema masa resorte en una dimensión, tenemos que:

$$F = -k\Delta x \quad (17)$$

En general, para la partícula  $m_c$ , existen tres fuerzas ejercidas por  $m_w$  en dirección de  $\vec{\Delta r_w}$  debido a los componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  del vector, y así para cada una de las partículas  $m_n$ ,  $m_s$  y  $m_e$  en las direcciones  $\vec{\Delta r_n}$ ,  $\vec{\Delta r_s}$  y  $\vec{\Delta r_e}$  respectivamente. Sustituyendo los valores encontrados en la ecuación (14) y los respectivos de los vecinos de  $m_c$ , en la ecuación (17) obtenemos:

$$F_x = -k_n\Delta x_n - k_s\Delta x_s - k_e\Delta x_e - k_w\Delta x_w$$

Suponiendo que los resortes que unen a las masas de la membrana son iguales, entonces  $-k_n = -k_s = -k_e = -k_w = -k$  entonces:

$$F_x = -k(\Delta x_n + \Delta x_s + \Delta x_e + \Delta x_w) \quad (18)$$

Análogamente:

$$F_y = -k(\Delta y_n + \Delta y_s + \Delta y_e + \Delta y_w) \quad (19)$$

$$F_z = -k(\Delta z_n + \Delta z_s + \Delta z_e + \Delta z_w) \quad (20)$$

Siendo estas las fuerzas que actúan sobre  $m_c$ , que define su aceleración en el momento que  $m_c$  se encuentra oscilando. Dado que se conoce la fuerza, utilizando la *segunda ley de Newton*  $\vec{F} = m\vec{a}$ , y la ecuación de velocidad para un movimiento uniformemente acelerado, tenemos que la velocidad final para  $m_c$  está dada en función de su velocidad inicial y de la aceleración que siente la partícula en un instante de tiempo  $t$ , en consecuencia:

$$\begin{aligned} \vec{v}_f &= \vec{v}_i + \vec{a}t \\ &= \vec{v}_i + \frac{\vec{F}}{m}t \end{aligned}$$

Separando el vector de velocidad en sus componentes rectangulares y retomando los valores de fuerza de las ecuaciones (18), (19) y (20), se encuentran las componentes de velocidad para  $m_c$  siendo estos:

$$v_{fx} = v_{ix} + \frac{F_x}{m}t \quad (21)$$

$$v_{fy} = v_{iy} + \frac{F_y}{m}t \quad (22)$$

$$v_{fz} = v_{iz} + \frac{F_z}{m}t \quad (23)$$

Con esto obtenemos la velocidad de  $m_c$  transcurrido un tiempo  $t$ , esto permite realizar el cálculo de la nueva posición de la partícula para el mismo instante de tiempo, utilizando la ecuación de movimiento uniformemente acelerado, tenemos:

$$x_{fi} = x_i + v_{ix}t + \frac{1}{2} \frac{F_x}{m}t^2 \quad (24)$$

$$y_{fi} = y_i + v_{iy}t + \frac{1}{2} \frac{F_y}{m}t^2 \quad (25)$$

$$z_{fi} = z_i + v_{iz}t + \frac{1}{2} \frac{F_z}{m}t^2 \quad (26)$$

Las ecuaciones de velocidad y posición son las que se emplean en la definición de la función de evolución para el AC propuesto.

#### 4 Modelo de membrana vibrante usando un AC 2-dimensional

Basado en el análisis desarrollado en la sección 3.1, se define el modelo de AC para un sistema de membrana vibrantes fijo en los extremos de una longitud  $l \times l$  como: Una 4-tupla  $AC = (L, S, V, \Phi)$  donde cada célula  $m_c \in L$  está definida por su masa, posición inicial y su velocidad, cuando la membrana se encuentra en reposo, siendo:



$$\begin{aligned}
L: & \text{ Es una retícula regular 2-dimensional.} \\
S: & = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_{m_{i,j}}^t} : \text{vector de posición en tiempo } t \\ \overrightarrow{V_{m_{i,j}}^t} : \text{velocidad en el tiempo } t. \end{array} \right\} \forall m_{i,j} \in \mathbb{L}^2 \\
V: & V = \{(m_n, m_s, m_c, m_e, m_w)\} \\
\Phi: & \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\
\Phi: & \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \overrightarrow{P_{m_{cf}}^{t+1}} = \overrightarrow{P_{m_{ci}}^t} + \overrightarrow{V_{m_{ci}}^t} t + \frac{\sum_{v=1}^4 \overrightarrow{F_{v_c}^t}}{2m} t^2 \\ \text{b) } \overrightarrow{V_{m_c}^{t+1}} = \overrightarrow{V_{m_{cf}}^t} + \frac{\sum_{v=1}^4 \overrightarrow{F_{v_c}^t}}{m} t \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

donde :  $\sum_{v=1}^4 \overrightarrow{F_{v_c}^t}$  es la fuerza que los vecinos de  $m_c$  ejercen sobre ella en el tiempo  $t$ .  
 $\overrightarrow{P_{m_{cf}}^{t+1}}$ , es la posición final de la célula en el espacio, y  
 $\overrightarrow{V_{m_c}^{t+1}}$ , es la velocidad final en el tiempo  $t + 1$ .

La función de evolución  $\Phi$ , está compuesta por dos reglas fundamentales, ambas reglas se aplican simultáneamente a todas las células que conforman el lattice.

La regla *a*) define la posición de la célula en el tiempo  $t + 1$ , tomando la velocidad en el tiempo  $t$ , esta posición se actualiza, siendo la nueva posición inicial para  $t + 2$  y así sucesivamente. Similarmente, para *b*) la velocidad final para el tiempo  $t + 1$  se actualiza, siendo la velocidad inicial para el tiempo  $t + 2$ .

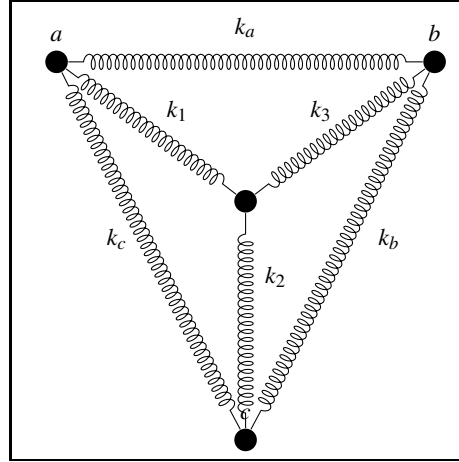
Un punto importante en la definición del modelo es la constante de restitución para los resortes empleada en la ecuación (17), a diferencia de otros modelos [5] en el cual la constante de restitución era relativamente simple de calcular, en este modelo nos enfrentamos a un problema, el que el arreglo de masas y resortes no presentan un patrón serial sino que presentan un arreglo de mallas, para obtener este valor procedemos de la siguiente manera:

Análogamente al método para reducción de mallas eléctricas, para obtener una constante de restitución general iniciamos definiendo como se pueden reducir arreglos de tipo "Delta" a "Estrella" y viceversa, tomando como base la figura 4.

**Definición 4 (Transformación Delta a Estrella)** Definimos la transformación de un arreglo de resortes en patrón delta hacia un patrón estrella como:

$$k_1 = \frac{k_a k_c}{k_a + k_b + k_c} \quad (27a)$$

$$k_2 = \frac{k_b k_c}{k_a + k_b + k_c} \quad (27b)$$



**Fig. 6.** Representación de un arreglo de resortes en forma de Delta-Estrella.

$$k_3 = \frac{k_a k_b}{k_a + k_b + k_c} \quad (27c)$$

Donde  $k_1, k_2, k_3$  son las nuevas constantes de restitución que tendrán los resortes al realizar la transformación y  $k_a, k_b, k_c$  son las constantes de restitución que sirven como base para el cambio.

**Definición 5 (Transformación Estrella a Delta)** Definimos la transformación de un arreglo de resortes en patrón estrella hacia un patrón delta como:

$$k_a = \frac{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}{k_2} \quad (28a)$$

$$k_b = \frac{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}{k_1} \quad (28b)$$

$$k_c = \frac{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}{k_3} \quad (28c)$$

Donde  $k_a, k_b, k_c$  son las nuevas constantes de restitución que tendrán los resortes al realizar la transformación y  $k_1, k_2, k_3$  son las constantes de restitución que sirven como base para el cambio.

Es necesario saber como tratar los resortes que se encuentren conectados en serie o en paralelo, para esto definimos lo siguiente:

**Definición 6 (Resortes conectados en serie)** Dado un grupo de resortes unidos en un patrón serie, definimos la constante de restitución total del arreglo como:

$$\frac{1}{k_t} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \quad (29)$$

Donde  $k_t$  es la constante de restitución total del arreglo y  $k_1, \dots, k_n$  son las constantes de restitución de cada uno de los resortes que forman el arreglo.

**Definición 7 (Resortes conectados en paralelo)** Dado un grupo de resortes unidos en un patrón paralelo, definimos la constante de restitución total del arreglo como la suma de las constantes de restitución de todos los resortes que formen el arreglo.

#### 4.1 Cálculo de la constante $k$

Se procede de la siguiente forma para calcular el valor de la constante de restitución  $k$  de los resortes que unirán a las masa correspondientes.

El proceso inicia suponiendo que la membrana tiene una constante de elasticidad con un valor igual a  $k_t$ . Si se inicia con una membrana representada por el AC propuesto conformada por  $2 \times 2$  nodos, luego entonces siguiendo la reducción para resortes conectados en serie y en paralelo obtenemos que:

$$k = k_t$$

Siguiendo el proceso para un AC de  $3 \times 3$  nodos, encontramos que:

$$k = \frac{3k_t}{2}$$

Si se continua podemos ver que la relación se presenta de la forma:

$$k = \frac{n}{2}k_t$$

donde  $k$  es la constante de los resortes,  $k_t$  la constante de elasticidad de la membrana y  $n$  el número de nodos para un AC de  $n \times n$  nodos.

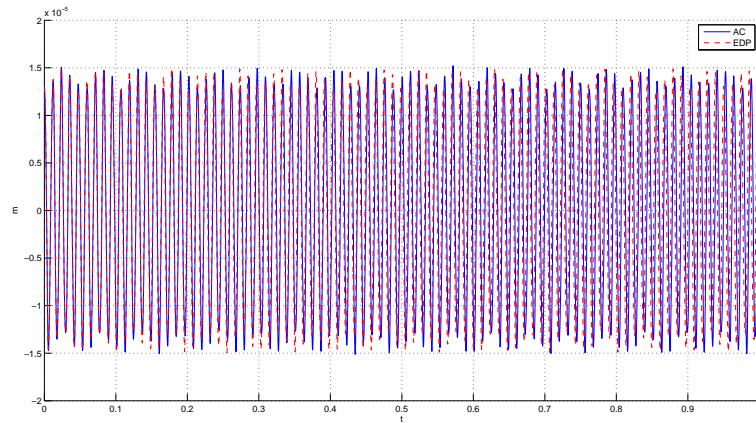
## 5 Simulación

Para realizar la simulación con el AC propuesto, tomamos como base una membrana con las siguientes características:

- Longitud:  $10 \times 10$  cm. estirada 20% de su longitud.
- Densidad: 0.1
- Tensión:  $20 \text{ N/m}$
- Nodos:  $50 \times 50$  nodos para el AC.

Las condiciones iniciales para el AC, son las mismas que las descritas para la EDP de la que se derivó el modelo.

Se presenta el desplazamiento obtenido por la EDP de la membrana que osciló por 1s y de la cual se tomaron  $1 \times 10^4$  muestras, también se presenta el desplazamiento que se obtuvo del AC propuesto para la misma célula durante el mismo tiempo y con el mismo número de muestras.



**Fig. 7.** Gráfica de superposición de la simulación realizada por el AC y la EDP, se presenta el desplazamiento de la célula  $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$  en  $z$  para ambos casos.

Las figuras 7 y 8, muestran la superposición de las gráficas obtenidas de las oscilaciones arrojadas por el AC (en línea continua) y por la EDP (en línea punteada) así como un acercamiento a la misma superposición.

De forma cualitativa, existe una correspondencia de fase entre los dos modelos para la misma célula.

Obteniendo los espectros de frecuencia para ambas señales y graficándolos, se observar que existe una congruencia entre los espectros de frecuencia arrojados por el AC y la EDP (ver figura 9). En la gráfica 10 puede verse que la frecuencia fundamental para ambos modelos se encuentra alrededor de los  $85Hz$ .

## 5.1 Error

Para calcular el error cuadrático medio entre las medidas generadas por el AC y los valores de referencia que nos proporciona la EDP, empleamos la formula:

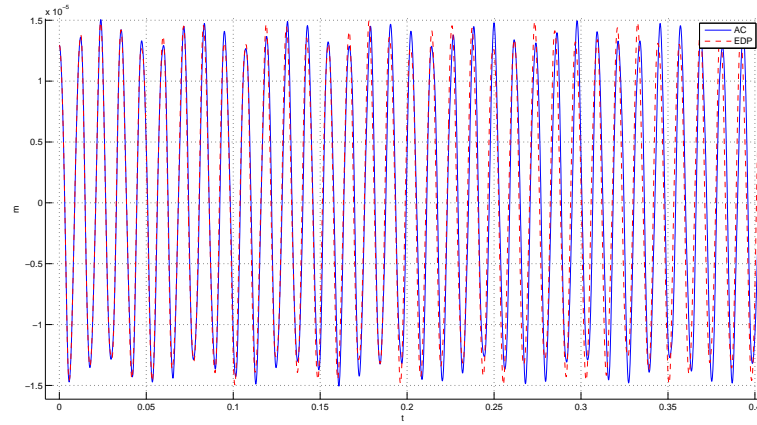
$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Vac_i - Vr_i)^2$$

donde  $Vac_i$  es el  $i$ -ésimo valor estimado por el AC y  $Vr_i$  es el valor de referencia tomado de la EDP.

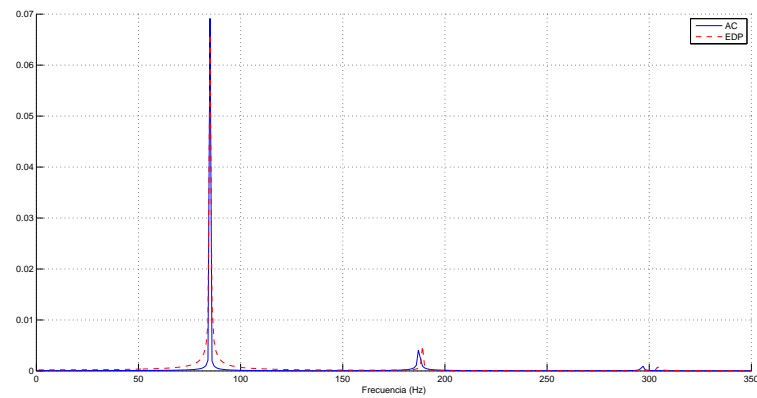
Realizando el cálculo obtenemos que  $MSE = 4.4189 \times 10^{-11}$ .

## 6 Conclusiones

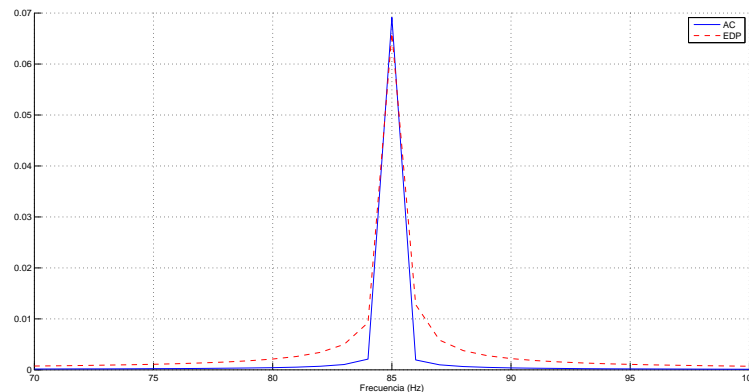
Se puede concluir que escalar un modelo de AC de cuerda vibrantes a dos dimensiones, para modelar membranas y es factible extender el modelo a tres dimensiones. La di-



**Fig. 8.** Acercamiento de la gráfica de superposición de la simulación realizada por el AC y la EDP, se presenta el desplazamiento de la célula  $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$  en  $z$  para ambos casos.



**Fig. 9.** Gráfica de superposición del espectro de frecuencias de la simulación realizada por el AC y la EDP.



**Fig. 10.** Acercamiento de la gráfica de superposición del espectro de frecuencias de la simulación realizada por el AC y la EDP.

ficultad radica en obtener la relación existente entre la elasticidad del material que se modela y la constante de restitución de los resortes internos del AC.

El modelo AC para la membrana, queda liberado de las condiciones iniciales, pues no es necesario redefinirlo debido a algún cambio en estas por lo que es posible definir las condiciones iniciales y simular el comportamiento del sistema de forma inmediata, a diferencia de la EDP que es sensible a dichas condiciones para su solución.

La expansión del modelo de una a dos dimensiones, trae consigo el incremento de la complejidad computacional del modelo, de lineal en el caso de una dimensión, a una complejidad  $O(n^2)$  debido a que el espacio del AC ahora es una matriz de  $n \times n$ . En este sentido se justificaría la paralelización del modelo, si definimos  $m$  como el número de hilos de ejecución que ayuden a la evolución del AC por unidad de tiempo, entonces la complejidad del AC quedaría como  $O(\frac{n^2}{m})$  y si hacemos a  $m$  lo suficientemente grande tal que  $m \rightarrow n$ , entonces la complejidad se reduce a  $O(n)$  lo que justifica la paralelización del modelo.

## Agradecimientos

Los autores agradecen al CONACYT, a la COFAA-IPN (proyecto número 20143959) y EDI-IPN por el apoyo proporcionado a este trabajo.

## References

- [1] Bar-Yam, Y.: "Dynamics of Complex Systems". Addison-Wesley, USA (1997)
- [2] Chopard, B., et al.: "Cellular Automata Modeling of Physical Systems". Cambridge University Press, USA (1998)
- [3] Espericueta, R.: "Cellular Automata Dynamics Explorations in Parallel Processing". Bakersfield College, USA (1997)

- [4] Hsu, H.P.: “Análisis de Fourier”. Prentice Hall, México (1998)
- [5] Huerta-Trujillo, I., Chimal-Eguía, J., Sánchez-Salas, N., Martínez-Nuño, J.: Modelo de autómatas celulares 1-dimensional para una edp hiperbólica. *Research in Computing Science* 58(ISSN: 1870-4069), 407 – 423 (November 2012)
- [6] Kinsler, L.: *Fundamentals of acoustics*. Wiley (2000)
- [7] Mitchell, M.: “Computation in cellular automata: A selected review”. *Nonstandard Computation* pp. 95–140 (1998), Weinheim: VCH Verlagsgesellschaft
- [8] Van Walstijn, M., Mullan, E.: Time-domain simulation of rectangular membrane vibrations with 1-d digital waveguides. pp. 449–454 (2011)
- [9] Wolfram, S.: “statistical mechanics of cellular automata”. *Reviews of Modern Physics* (55), 601–644 (1983)